Ministère de l'éducation nationale

Session 2018	**PE2-18-PG4** *Repère à reporter sur la copie*

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 10 avril 2018
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :
- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 11 pages, numérotées de 1 à 11. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

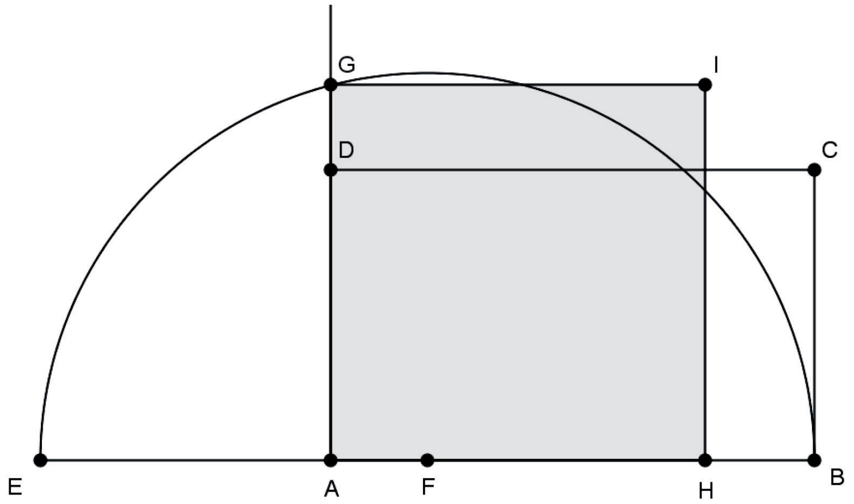
Une aire de détente

Un architecte paysagiste est chargé de l'embellissement d'une aire de détente. Avant les travaux, il s'agit d'un terrain rectangulaire. L'architecte a notamment pour mission de construire une aire de détente de forme carrée ayant la même aire que l'aire de détente rectangulaire initiale.

A. UNE CONSTRUCTION

Méthode de Samuel Marolois (1572 -1627), mathématicien et ingénieur militaire hollandais.

Sur le plan de l'architecte, on peut voir la configuration suivante réalisée à partir du rectangle initial ABCD :



Le rectangle ABCD étant donné, avec AB>BC, le protocole de cette construction est le suivant :

- construire E sur [BA) tel que AE = AD avec E n'appartenant pas à [AB] ;
- construire F milieu de [EB] et tracer le demi-cercle de diamètre [EB] qui coupe la demi-droite [AD) en G ;
- construire les points H et I tels que AHIG soit un carré, avec H appartenant à [AB).

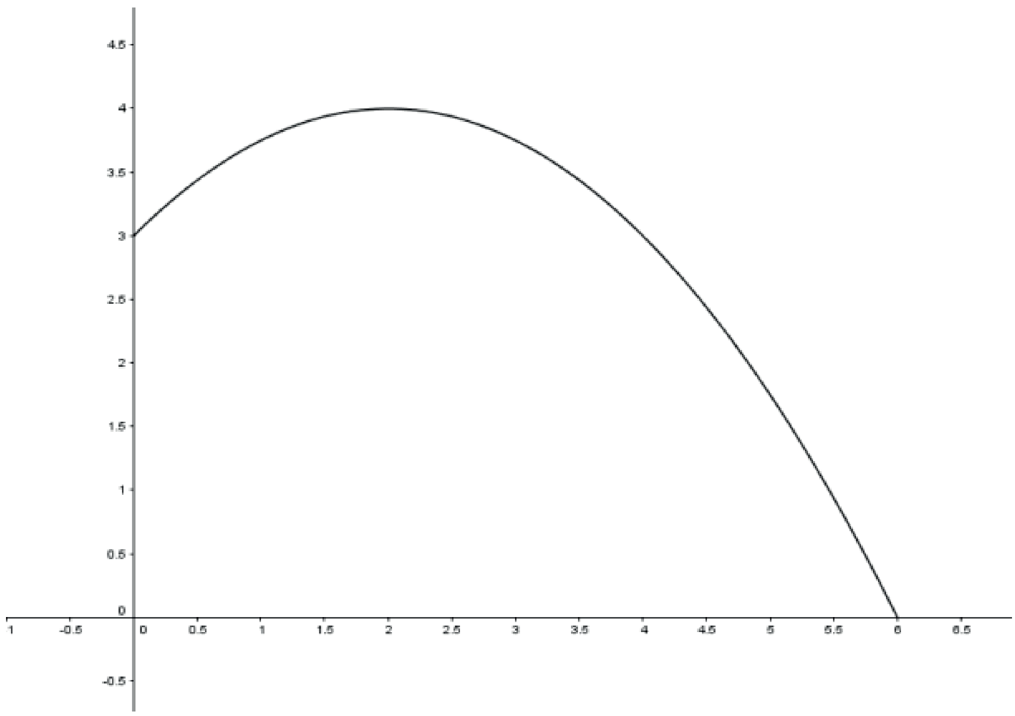
1. On se place dans le cas où le terrain rectangulaire initial a une longueur de 308 mètres et une largeur de 132 mètres. On veut réaliser un plan à l'échelle de ce terrain, sous forme d'un rectangle ABCD, tel que la longueur du terrain soit représentée par un segment [AB] mesurant 7,7 cm.

- **a.** Montrer que la largeur [AD] du rectangle doit mesurer 3,3 cm.
- **b.** Quelle est l'échelle de ce plan ?
- **c.** Construire le rectangle ABCD et effectuer le protocole de construction donné ci-dessus. Laisser les traits de construction apparents.
- **d.** Calculer les longueurs des segments [EB], [EF], [AF] et [FG] sur le plan.
- **e.** En déduire l'aire du carré AGIH sur le plan.
- **f.** En déduire l'aire du carré correspondant dans la réalité et la comparer à l'aire du terrain rectangulaire initial.

2. L'architecte prétend que quelles que soient les dimensions du rectangle initial, le carré AHIG obtenu a toujours la même aire que le rectangle ABCD. Démontrer que cette affirmation est vraie.
On pourra poser AB = a et AD = b (avec a > b).

B. AMÉNAGEMENT D'UNE FONTAINE

L'architecte souhaite installer une fontaine d'eau au centre du carré AHIG construit précédemment.
La figure ci-dessous représente la trajectoire d'une goutte d'eau dans un plan vertical.



L'abscisse 0 correspond au centre du carré et l'ordonnée 0 correspond au niveau du sol. L'axe des ordonnées donne la direction de la colonne de laquelle jaillit l'eau. Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées $(x ; y)$, cela signifie qu'elle est à la distance x, exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y, exprimée en mètre, par rapport au sol. La courbe passe par les points de coordonnées (0 ; 3) et (6 ; 0).
Les graduations des axes expriment des mesures de longueurs en mètre.

1. **a.** À quelle hauteur est la goutte d'eau quand elle sort de la colonne ?
   b. À quelle distance du centre du carré l'eau retombe-t-elle ?
   c. Déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.

2. La fonction représentée graphiquement ci-dessus est définie sur l'intervalle [0 ; 6] par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + b\,x + c$$

où b et c sont des nombres que nous allons chercher à déterminer.
   a. Donner, en fonction de b et c, les images respectives de 0 et de 6 par la fonction f.
   b. En déduire les deux nombres b et c.

c. Prouver que pour tout x de l'intervalle [0 ; 6], on a : $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$

d. En déduire la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine. Justifier.

C. UN PEU DE VERDURE

Par souci d'économie, il est décidé de récupérer les arbustes qui avaient été plantés de façon régulière sur le contour d'un terrain rectangulaire de longueur 308 mètres et de largeur 132 mètres.
Il y a un arbuste à chaque coin et la distance entre deux arbustes voisins est toujours la même, c'est un nombre entier de mètres.

1. De quelle(s) distance(s) peut-il s'agir ?

2. La distance, exprimée en mètre, entre chaque arbuste est un nombre premier supérieur à 3.
De combien d'arbustes l'architecte dispose-t-il ?

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1 :

Pour chacun des problèmes suivants, indiquer laquelle des cinq réponses proposées est juste.
Aucune justification n'est attendue.

1. Amy dispose d'un cadenas dont la combinaison est un code à quatre chiffres. Chaque chiffre peut prendre une valeur de 0 à 6. Combien y a-t-il de combinaisons ?

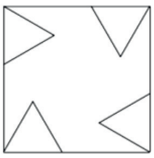
A : 720 B : 24 C : 28 D : 2 401 E : 16 384

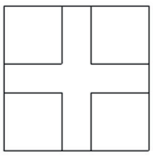
2. Parmi les quatre figures ci-dessous, laquelle n'est pas obtenue avec un des trois programmes proposés ?

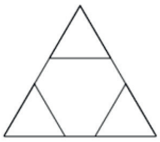
Programme 1

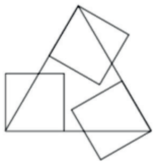
Programme 2

Programme 3

A : 

B : 

C : 

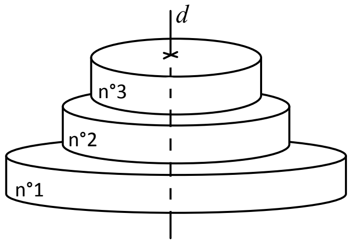
D : 

3. Un constructeur annonce qu'une voiture de course consomme 17 litres d'essence aux 100 km lorsqu'elle roule sur circuit à la vitesse de 70 m/s.
Quelle sera sa consommation en 1h30min de trajet à cette vitesse ?

A : 17,85 L B : 19,83 L C : 42,84 L D : 64,26 L E : 107,1 L

EXERCICE 2 :

Un élève pâtissier doit présenter, pour son projet de fin d'études, une pièce montée composée de 3 gâteaux cylindriques superposés, tous centrés sur l'axe d comme l'indique la figure ci-contre :



- Les trois gâteaux cylindriques sont de même hauteur : 10 cm ;
- Le plus grand gâteau cylindrique, gâteau n° 1, a pour rayon 30 cm.
- Le rayon du gâteau n°2 est égal aux $\frac{2}{3}$ de celui du gâteau n°1.
- Le rayon du gâteau n° 3 est égal aux $\frac{3}{4}$ de celui du gâteau n°2.

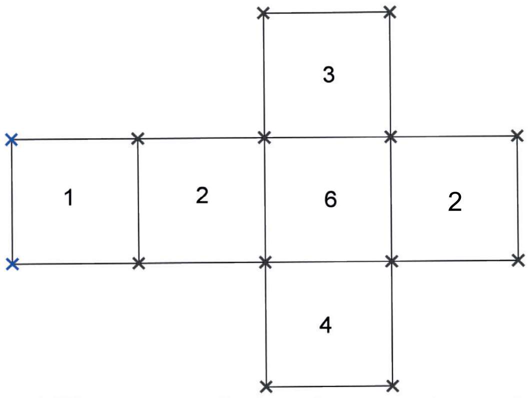
1. Calculer le rayon du gâteau n° 3.

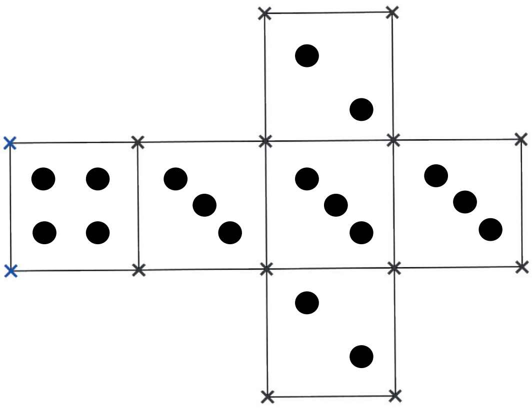
2. Montrer que le volume total exact de la pièce montée est égal à $15\,250\pi\ \text{cm}^3$.

3. Quelle fraction du volume total représente le volume du gâteau n° 3 ? Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

EXERCICE 3 :

On lance deux dés équilibrés. Le premier dé indique un nombre à l'aide des chiffres de 1 à 6 et le deuxième dé indique un nombre à l'aide des constellations de 2 à 4, comme indiqué sur les patrons ci-dessous.





On additionne ensuite les deux nombres obtenus :

- si la somme est 6 on gagne 3 jetons ;
- si la somme est un nombre pair différent de 6 on gagne 1 jeton ;
- si la somme est un nombre impair on ne gagne rien.

1. Un joueur a gagné 1 jeton. Il a obtenu « 4 » avec le premier dé. Que peut-on dire sur le résultat obtenu avec le deuxième dé ? Justifier.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 jetons ? Justifier.

3. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de jetons ? Justifier.

4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un jeton ? Justifier.

EXERCICE 4 :

Voici un programme de calcul, appliqué sur un tableur :

	A	B
1	**Programme**	**Résultat**
2	Prendre un nombre	5
3	Ajouter 3 à ce nombre	8
4	Élever la somme précédente au carré	64
5	Retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	39
6		
7		

1. **a.** Vérifier qu'on obtient 33 en choisissant 4 comme nombre de départ.

b. Quel résultat obtient-on si on choisit 4,2 comme valeur de départ ?

c. Quel résultat obtient-on si on choisit $\frac{7}{10}$ comme valeur de départ ? On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

2. Quelles formules peut-on écrire dans les cases B3 ; B4 et B5 pour obtenir cette feuille de calcul ?

3. Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est exacte et justifier la réponse.

a. **Affirmation 1** : « Aucun nombre ne permet d'obtenir 0 comme résultat final. »

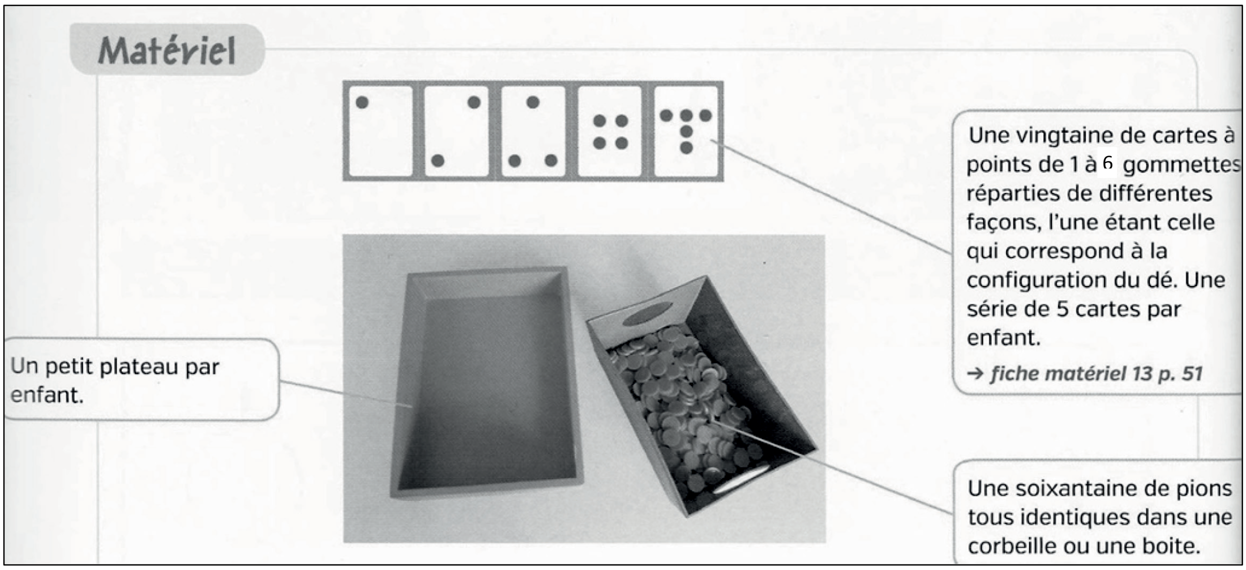
b. **Affirmation 2** : « Si on prend un nombre entier positif, le résultat est toujours divisible par 3. »

TROISIÈME PARTIE (14 points)

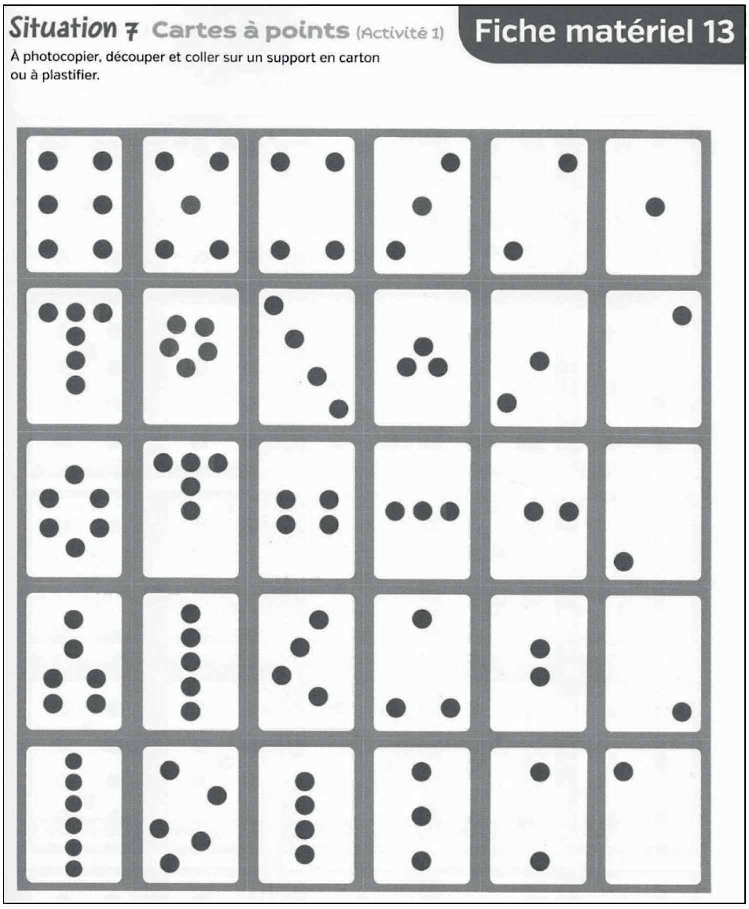
Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1 :
L'activité suivante intitulée « *Cartes à points* » est extraite de l'ouvrage « *Découvrir les maths Situations MS, Nouvelle édition, Programme 2015, Dominique Valentin, Hatier* 2015 ».

Voici le matériel utilisé :



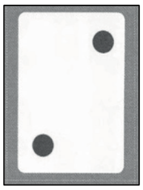
Les jetons sont d'une taille proche des points sur la carte.



La règle du jeu est la suivante :

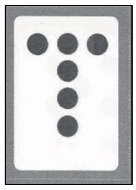
> *Les cartes sont disposées en tas à l'envers devant quatre ou cinq joueurs. Chaque enfant tire une carte et prend dans la corbeille « autant de pions qu'il y a de gommettes sur la carte ».*
>
> *S'il a réussi, il verse les pions dans son plateau et garde la carte ; sinon, il remet les pions dans la corbeille et remet la carte, à l'envers, sous le paquet commun. On joue cinq tours : le gagnant est celui qui a le plus de cartes.*

1. Décrire deux procédures que les élèves peuvent utiliser pour quantifier la collection de gommettes sur la carte ci-contre.



2. **a.** Décrire deux procédures que les élèves peuvent utiliser pour quantifier la collection de gommettes sur la carte ci-contre.

b. Pour chacune des procédures données, décrire une erreur que les élèves sont susceptibles de faire.



3. Comment les élèves peuvent-ils valider leur réussite ?

4. Donner trois variables de différenciation sur lesquelles les concepteurs du jeu se sont appuyés pour construire les différentes cartes.

SITUATION 2 :

Un enseignant propose les problèmes suivants à ses élèves de cycle 2.

> **Problème 1**
> Paul a gagné 8 billes pendant la récréation. Il a maintenant 22 billes.
> Combien avait-il de billes avant la récréation ?

> **Problème 2**
> Marie mesure 135 cm. C'est 45 cm de moins que son papa.
> Quelle est la taille du papa de Marie ?

1. De quel type de problèmes relèvent ces deux énoncés ?
2. Décrire deux procédures que l'on peut attendre d'élèves de CE1 pour le problème 1.
3. Quelles erreurs peuvent être induites par les formulations de ces deux problèmes ?

SITUATION 3 :

Voici quatre énoncés de problèmes proposés lors d'une séance par une enseignante de CM2.

Problème 1 :
Pour faire 8 brioches, il faut 500 g de farine, 6 œufs et 200 g de beurre.
Quelles quantités d'ingrédients sont nécessaires pour fabriquer 16 brioches ? 4 brioches ?

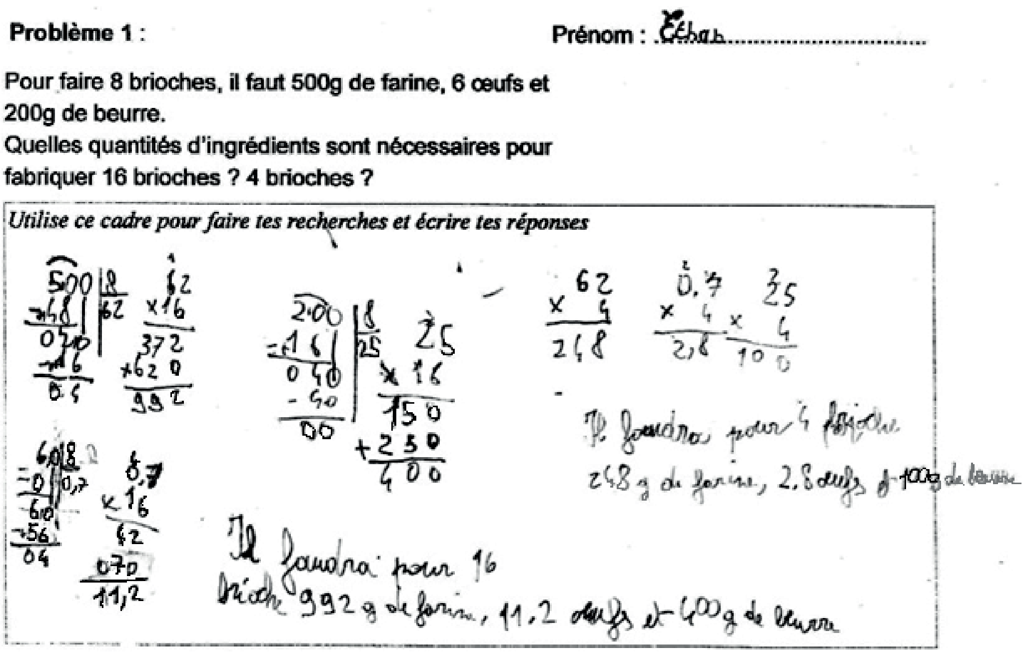
Problème 2 :
Un bébé pèse 4 kilos à 1 mois.
Combien pèsera-t-il à 12 mois ?

Problème 3 :
Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
Pour 100 personnes ?

Problème 4 :
Arthur a 6 piles identiques qui pèsent 18 g en tout.
Combien pèsent 8 piles ?

1. Quelle notion mathématique ces problèmes permettent-ils de consolider ?
2. Donner un argument pour justifier la pertinence de proposer les problèmes 2 et 3 dans cette séance.
3. Analyser la production d'Ethan (procédures, réussites et erreurs) au problème 1 (cf. Annexe 1).
4. Analyser les productions (procédures, réussites et erreurs) de Léandre et Aboubakr au problème 3 (cf. Annexe 2).
5. Décrire deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour résoudre le problème 4.

__Annexe 1__


Problème 1 : **Prénom :** Ethan

Pour faire 8 brioches, il faut 500g de farine, 6 oeufs et 200g de beurre.
Quelles quantités d'ingrédients sont nécessaires pour fabriquer 16 brioches ? 4 brioches ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses

Il faudra pour 4 brioche 248 g de farine, 2.8 oeufs et 100g de beurre

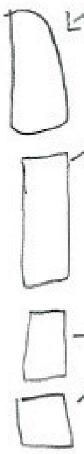
Il faudra pour 16 brioche 992 g de farine, 11.2 oeufs et 400g de beurre

Annexe 2

Problème 3 : Prénom : Léandre

Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
Pour 100 personnes ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses



un bus 40 perssones

desxièmes 10 perssonnes

deux autres bus 100 personnes

Il faudras deux bus pour 50 perssones et quatres bus pour 100 perssones

Problème 3 : Prénom : Aboubakr

Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
Pour 100 personnes ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses

```
  50
 x40
  00
+2000
 2000

 100
x 40
  000
+4000
 4000
```

Pour 50 perssonn il faut reservé 2000 bus.

Pour 100 personne : 4000 bus.