Ministère de l'éducation nationale

Session 2016

PE2-16-PG4
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 19 avril 2016
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :
- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 11 pages, numérotées de 1 à 11. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

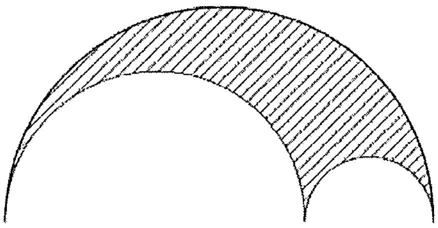
L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

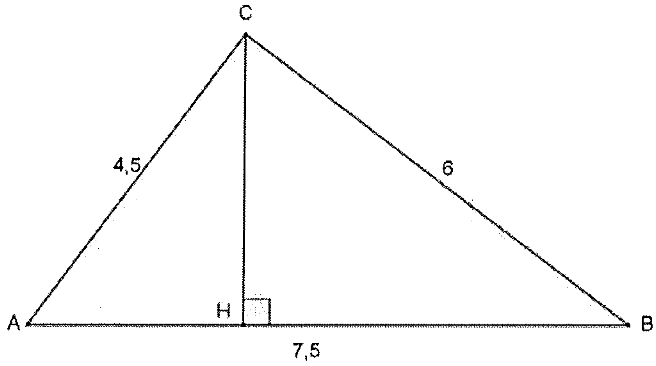
L'arbelos est une figure géométrique qui doit son nom à un outil appelé *tranchet du cordonnier*. Cette figure a été étudiée par Archimède il y a plus de deux millénaires.



Partie A : Étude préliminaire - Relations métriques dans un triangle rectangle

1. Étude d'un cas particulier

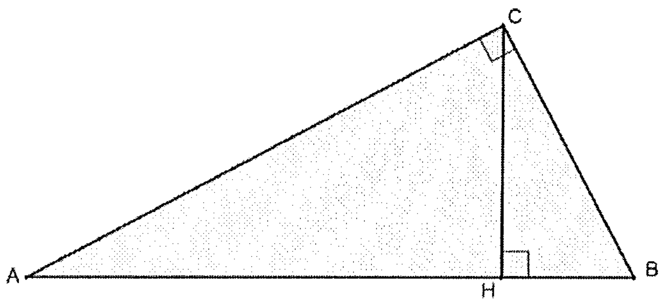
Soit ABC un triangle de dimensions : AB = 7,5 cm ; BC = 6 cm et AC = 4,5 cm.
On appelle H le pied de sa hauteur issue du sommet C.



- **a.** Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à 13,5 cm².
- **b.** En calculant d'une autre façon l'aire du triangle ABC, en déduire que la longueur CH est 3,6 cm.
- **c.** Calculer les longueurs AH et BH.
- **d.** Vérifier que dans ce triangle $CH^2 = AH \times BH$.

2. Étude du cas général

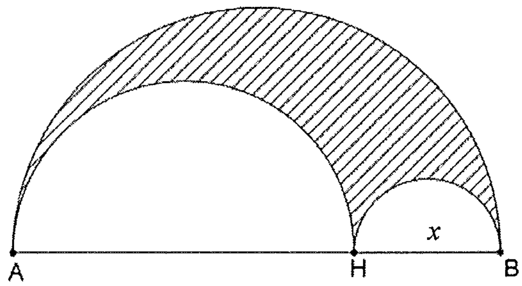
Soit ABC un triangle rectangle en C. On appelle H le pied de sa hauteur issue du sommet C.



- **a.** Montrer que les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont la même mesure.
- **b.** En déduire à l'aide des relations trigonométriques que $\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH}$, puis que $HC^2 = HA \times HB$.

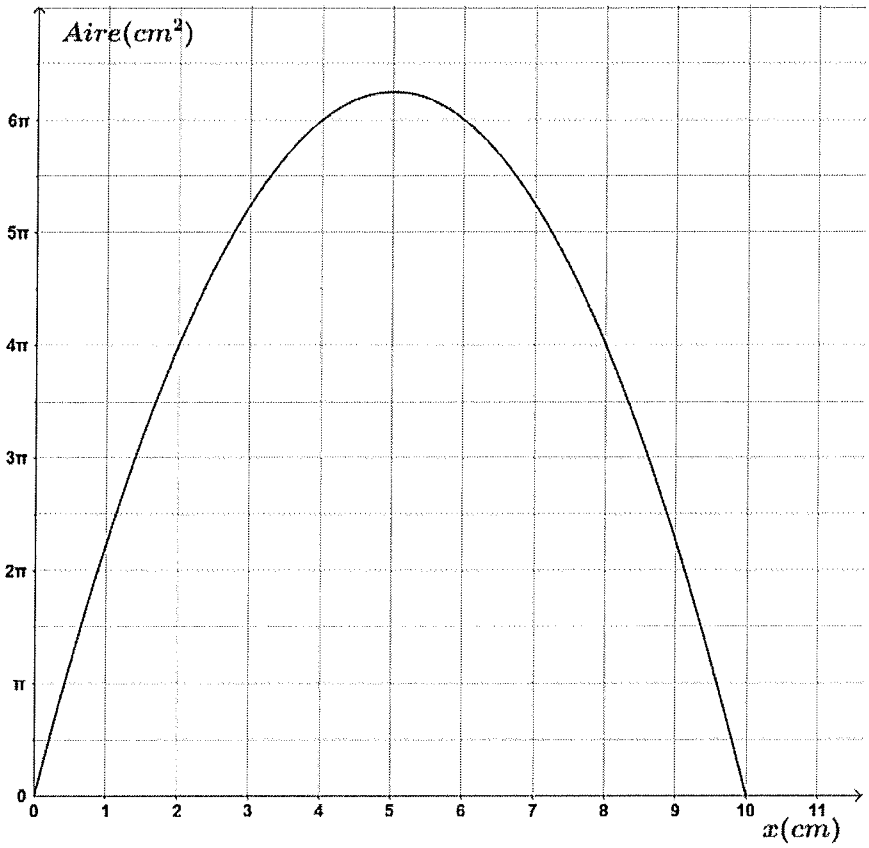
Partie B : Étude de l'aire d'un arbelos dans un cas particulier

Dans cette partie, on fixe AB = 10 cm.
On considère un point H appartenant au segment [AB], et on note x = BH.



1. Étude graphique de l'aire

La représentation graphique de la fonction A exprimant l'aire de l'arbelos en fonction de la distance BH est donnée ci-dessous.



Les réponses aux questions suivantes seront données par lecture graphique.

a. Donner en fonction de π l'aire de l'arbelos lorsque x = 4.
b. Pour quelles valeurs de BH l'aire de l'arbelos est-elle égale à 2π cm² ?
c. Pour quelles valeurs de BH l'aire est-elle comprise entre 0 et 4π cm² ?
d. **i.** Pour quelle valeur de BH l'aire de l'arbelos est-elle maximale ?
ii. Donner en fonction de π la valeur de cette aire maximale.

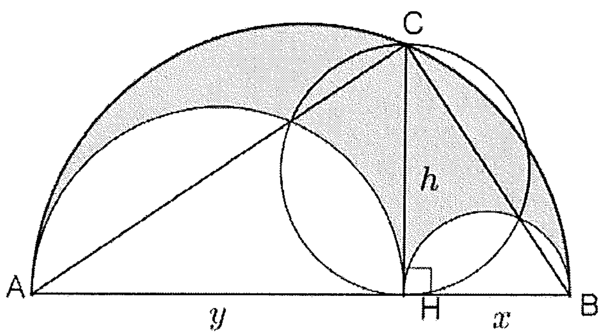
2. Vérification algébrique

On rappelle que l'aire d'un disque de diamètre d est égale à $\frac{1}{4}\pi\, d^2$.

- **a.** Quelles valeurs x peut-il prendre ?
- **b.** Exprimer l'aire de l'arbelos $A(x)$ en fonction de x.
- **c.** Montrer que l'on peut écrire $A(x) = \frac{25\,\pi}{4} - \frac{\pi}{4}(x-5)^2$.
- **d.** Vérifier par le calcul les valeurs déterminées graphiquement pour l'aire maximale à la question **B-1.d**.

Partie C : Étude de l'aire d'un arbelos dans le cas général

On donne deux points distincts A et B. On construit un demi-cercle de diamètre [AB].
Soit C un point de ce demi-cercle, distinct de A et de B.
On appelle H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.
On construit les deux demi-cercles de diamètre [AH] et [HB] situés dans le demi-plan délimité par la droite (AB) contenant C.
On note x la longueur BH, y la longueur AH et *h* la longueur CH.
L'arbelos est la zone du plan grisée sur la figure.



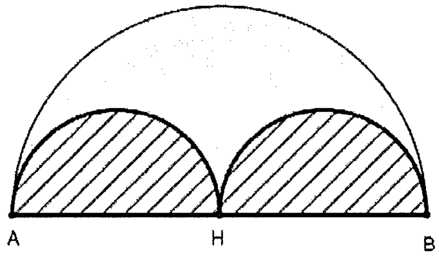
1. Montrer que l'aire de l'arbelos est égale à $\frac{\pi}{4}xy$.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
3. Utiliser la relation métrique établie à la question A2b pour montrer que l'aire de l'arbelos est égale à l'aire du disque de diamètre [CH].

Partie D : Prolongement

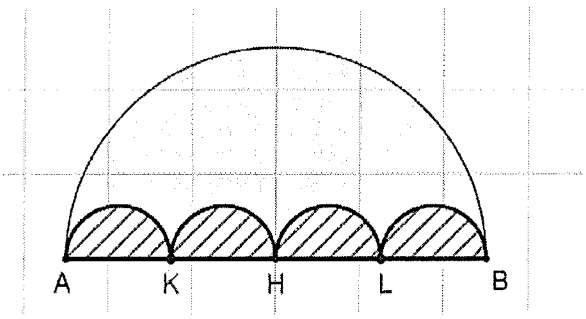
Dans cette partie, le segment [AB] mesure 10 cm. On le partage en n segments d'égale longueur, n étant un entier naturel non nul, puis on construit n demi-disques de diamètres ces n segments comme indiqué dans les exemples ci-dessous.

On s'intéresse au périmètre et à l'aire des figures formées de ces n demi-disques, délimitées par le diamètre [AB] et les n demi-cercles (hachurées dans les deux exemples ci-dessous).

Pour n = 2



Pour n = 4



1. Dans le cas où n = 2, vérifier que le périmètre de la partie hachurée est égal à $5\pi + 10$ cm et que son aire est égale à 6,25 π cm².

2. Déterminer les valeurs exactes du périmètre puis de l'aire de la partie hachurée dans le cas où n = 4.

3. Étude du cas général.
   a. Montrer que le périmètre de la surface hachurée est le même quelle que soit la valeur de n.
   b. Montrer que l'aire de la surface hachurée est égale à $\frac{25\pi}{2n}$ cm².

4. Trouver la plus petite valeur de n pour que l'aire de la surface hachurée soit inférieure à 0,1 cm². Combien mesure le périmètre pour cette valeur de n ?

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

EXERCICE 1

1. On lance un dé bien équilibré et on considère les points portés sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de points ?

2. On lance 2 dés bien équilibrés et on effectue la somme des points portés sur les faces supérieures. Quelle est la probabilité d'obtenir 8 ?

3. On considère un sac contenant 25 jetons rouges et 17 jetons bleus indiscernables au toucher. On tire 2 jetons l'un après l'autre, sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur ?

EXERCICE 2

Louise affirme que si on augmente la longueur du côté d'un carré de 100 % alors son aire augmente de 200 %.
Tessa n'est pas d'accord avec elle et affirme que l'aire sera doublée.
Eva soutient, quant à elle, que l'aire augmentera de 300 %.

Qui a raison ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 6.
- Multiplier par le nombre de départ.
- Ajouter 9.
- Afficher le résultat.

1. **a.** Montrer que si le nombre de départ est 5, le résultat affiché sera 64.
   b. Quel nombre sera affiché si le nombre choisi au départ est 10 ?

Un tableur a été utilisé pour mettre en œuvre ce programme de calcul. Une copie de l'écran obtenu est donnée ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*nombre de départ*	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	*résultat*	0	1	4	9	16	25	36

2. Une formule a été saisie dans la cellule B2 et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage de cellules C2: H2.
   Parmi les formules suivantes, laquelle a été saisie ?

= B1+6*B1+9	= (B1+6)*(B1+9)	= (B1+6)*B1+9

3. En observant la copie d'écran ci-dessus, émettre une conjecture sur le résultat obtenu en fonction du nombre de départ choisi.

4. Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 4

Un producteur de légumes sème des carottes sur deux parcelles différentes.
Pour répondre aux demandes de l'industrie agroalimentaire, les carottes doivent respecter certains calibrages.
On s'intéresse tout particulièrement à la longueur des carottes.

Après récolte, le producteur prélève un échantillon sur chacune des deux parcelles. Les résultats des mesures des longueurs des carottes de ces échantillons sont regroupés ci-dessous :

Parcelle A (400 carottes)	Parcelle B (500 carottes)
premier quartile : 7 cm troisième quartile : 12 cm médiane : 10 cm moyenne : 9,5 cm étendue : 9 cm minimum : 4,5 cm	premier quartile : 7 cm troisième quartile : 9 cm médiane : 8,5 cm moyenne : 8,8 cm étendue : 10 cm minimum : 5 cm

Dans cet exercice, il s'agit de dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse et de le justifier.

Affirmation 1 : au moins 75 % des carottes de l'échantillon prélevé sur la parcelle B mesurent moins de 10 cm.

Affirmation 2 : la plus grande carotte de l'échantillon prélevé sur la parcelle A mesure 14 cm.

Pour les deux affirmations suivantes, on considère que le producteur regroupe les échantillons des deux parcelles.

Affirmation 3 : la longueur moyenne d'une carotte est 9,15 cm.

Affirmation 4 : la valeur médiane des longueurs des carottes est 6,9 cm.

TROISIÈME PARTIE (14 points)

SITUATION 1 :

Dans une classe de CE1, l'exercice suivant a été proposé :

> Une mère décide de partager **équitablement** entre ses trois enfants **les 20 biscuits** d'un paquet.
> Combien de biscuits va-t-elle donner à chaque enfant ?

1. Analyse du texte du problème :
   - Donner une difficulté que comporte la présentation de cet énoncé de problème et expliquer une conséquence possible.
   - Citer deux incidences sur la résolution du problème que le choix des nombres 3 et 20 va engendrer.

2. Voici les productions de 4 élèves :

Léo

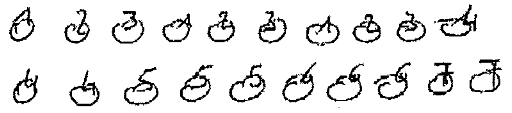
1 | | | | | | |

2 | | | | | | |

3 | | | | | |

Chaque enfant aura ...6 biscuits

Amy



Chaque enfant aura ..7... biscuits

TOM

20 = 10 + 10

Chaque enfant aura .10.. biscuits

MARIM

3/3/3/3/3/3/2

Chaque enfant aura ..6.. biscuits

Présenter dans un tableau :

- la démarche probable de chaque élève,
- les éventuelles erreurs de chacun,
- une origine possible de chacune de ces erreurs,
- les connaissances mathématiques illustrées par ces démarches.

SITUATION 2 :

Voici quatre problèmes extraits du manuel de mathématiques de CM1 de la collection LITCHI (ISTRA, Paris 2014).

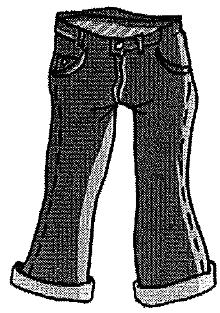
Résoudre des problèmes

A5 Ingrid achète 32 bouteilles de soda pour la fête de son club de danse. Elle achète les bouteilles par packs de 6. Elle met 5 packs dans son chariot.
Combien de bouteilles doit-elle encore ajouter ?

A6 Les stylos verts sont vendus par paquets de 4 ou bien à l'unité. Il en faut 29 pour donner un stylo à chaque élève du CM1.
- Combien de paquets faut-il acheter ?
- Combien de stylos à l'unité faut-il acheter pour compléter ?

B5 Pour la nouvelle année, le garagiste veut offrir un porte-clés à ses 78 clients. Les porte-clés sont vendus par lots de 8 ou bien à l'unité.
- Combien de lots doit-il acheter ?
- Combien de porte-clés à l'unité doit-il acheter pour compléter ?

B6 Julien possède deux boutiques de vêtements. Il commande 55 jeans pour l'un des magasins et 36 pour l'autre. Le livreur lui donne des paquets de 8 jeans et complète avec des pantalons à l'unité.



- Combien de paquets sont livrés ?
- Combien de jeans sont livrés à l'unité pour compléter ?

quarante-neuf 49

1. Préciser pour chaque problème s'il s'agit de la recherche de la valeur d'une part, de la recherche du nombre de parts ou de la recherche du reste.

2. Créer un exercice proposant la recherche de la valeur d'une part en reprenant les données numériques du problème A6.

3. Quelle différence peut-on identifier entre les problèmes B5 et B6 ?

SITUATION 3 :

Le problème suivant est posé à des élèves d'une classe de CM2 :

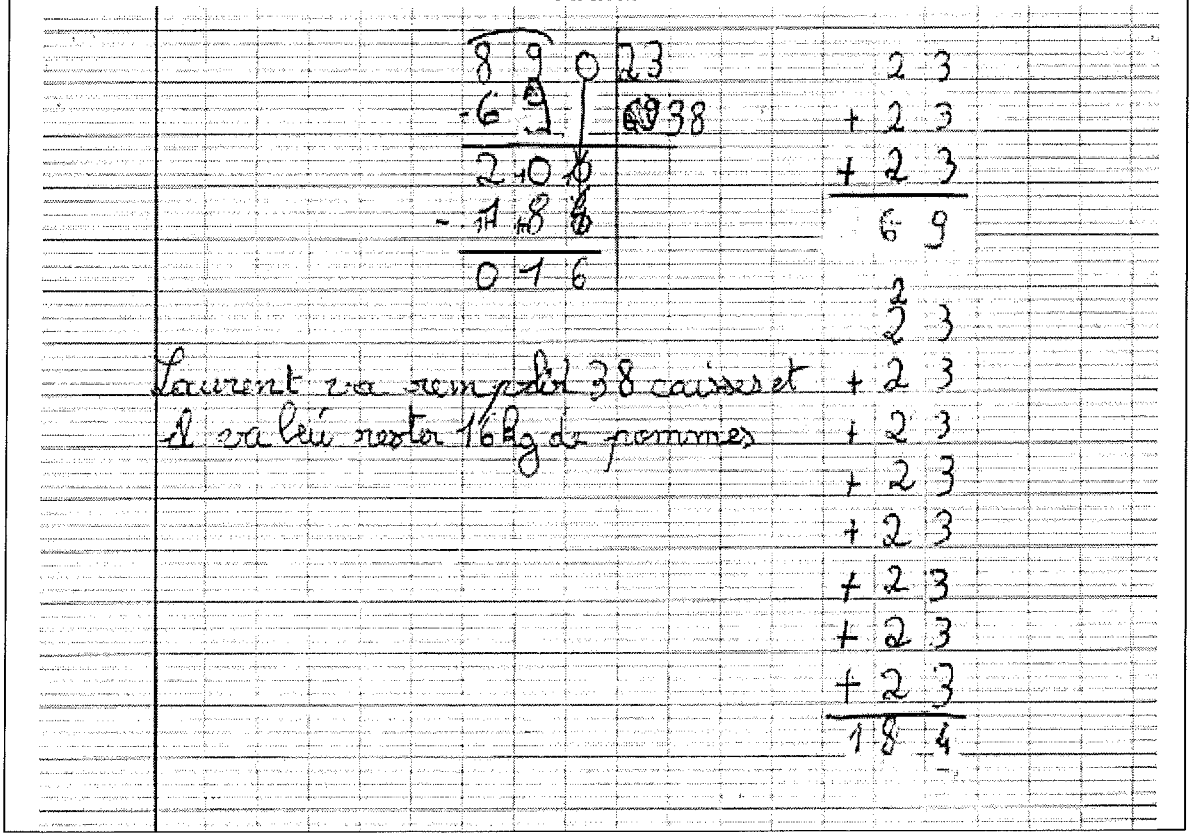
Dans son verger de pommiers, Laurent a récolté 890 kg de pommes.
Il les entrepose dans des caisses contenant chacune 23 kg de pommes.
Combien de caisses Laurent va-t-il remplir ?
Que lui restera-t-il ?

1. Quelle est la notion mathématique mise en jeu dans cet exercice ? Quelle est l'écriture mathématique de l'opération en ligne ?

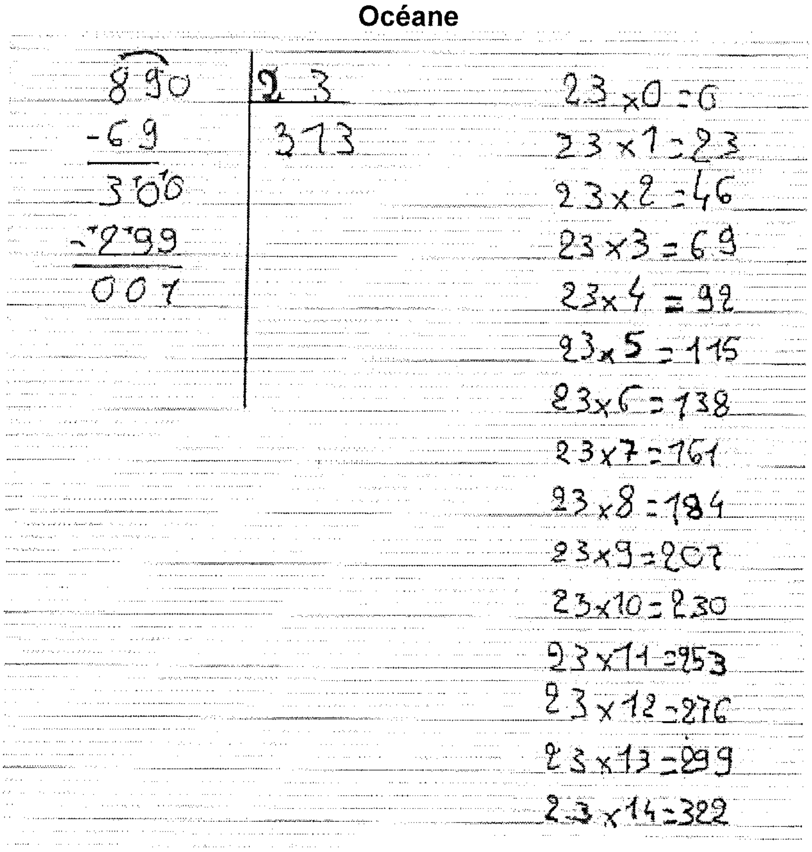
2. En quoi les deux questions de l'énoncé du problème sont-elles importantes ?

Voici les productions de trois élèves : Arthur, Océane et Dylan

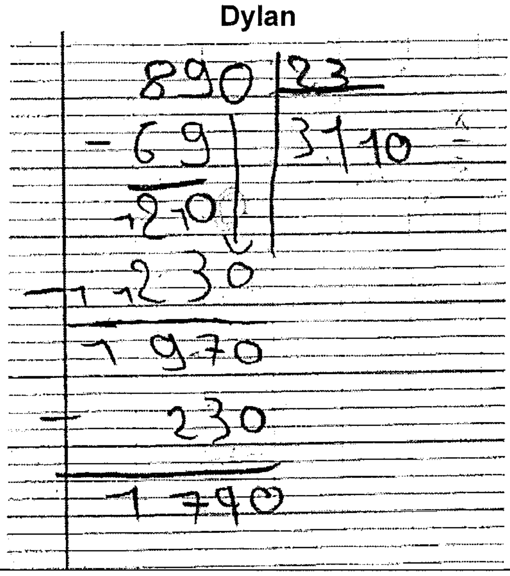
Arthur



Océane



Dylan



3. Relever les réussites d'Arthur et celles d'Océane.
4. À partir de la démarche d'Arthur, proposer des étapes didactiques pour faire évoluer sa procédure.
5. Relever la ou les erreurs d'Océane, puis émettre des hypothèses sur son ou leur origine.
6. Citer deux erreurs de Dylan et, pour chacune donner des éléments d'analyse.